Grothendieck群のノルム写像(代数的K-理論と代数的整数論)

丹原, 大介

数理解析研究所講究録
609巻 1987年 14-21

Grothendieck群のノルム写像

北大理学部　丹原大介（Daisuke Tambara）

L/Kが体の有限次分離拡大のとき，L加群VのCorestrictionとよばれるK加群$\mathrm{Cor}_{L/K}V$がある．例えばL/KがGをガロア群とするガロア拡大のとき，$\mathrm{Cor}_{L/K}V$はVのGによる共役たちのテンソル積のGで固定される部分である．Aが可換K代数なら同様に$\mathrm{Cor}_{L/K}$：$L\otimes A$加群$\longrightarrow A$加群がある．これは$\otimes$は保つが$\oplus$は保たない．しかし（射影加群の）K_0の間の写像$K_0(L\otimes A)\longrightarrow K_0(A)$を$L\otimes A$加群$V$の類$[V]$を$[\mathrm{Cor}_{L/K}V]$にうつすように定義できる．このことの証明とそれに関連することがらについてのべる．

§1　K_0の norm map

L/Kは体の有限次分離拡大．$\tilde{K}/K$はLを含む有限次ガロア拡大で，$G=\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$，$H=\mathrm{Gal}(\tilde{K}/L)$．すると$G/H$は$\Phi=\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\tilde{K})$と同一視される．$L$加群$V$に対し$\Phi\ni\phi:L\longrightarrow\tilde{K}$による係数拡大$\tilde{K}\underset{\phi}{\otimes}V$を$\phi_*V$で表わす．

$G \ni \sigma : \bar{K} \longrightarrow \bar{K}$ による係数拡大 $\bar{K} \underset{\bar{K}}{\otimes} (\ )$ も $\sigma_*(\ )$ で表わす．L加群 V に対して $\bar{K}$ 上のテンソル積 $\underset{\phi\in\Phi}{\otimes} \phi_* V$ をつくると，自然な同型 $\sigma_*(\otimes \phi_* V) \simeq \otimes(\sigma\phi)_* V \simeq \otimes \phi_* V$ は $\otimes \phi_* V$ 上にGの semi-linear action をさだめる． そこで

定義： $\mathrm{Cor}_{L/K} V = (\otimes \phi_* V)^G$ （G不変元の全体）

とすると，$\mathrm{Cor}_{L/K} V$ はK加群で $\bar{K} \otimes \mathrm{Cor}_{L/K} V \cong \otimes \phi_* V$ ．

注1． $f : X \longrightarrow Y$ が scheme の etale covering なら X 上の locally free module F に対し，$\mathrm{Cor}_{X/Y} F$ が同様に定義される．

注2． A が L 上の（not neces. commutative）algebra なら $\mathrm{Cor}_{L/K} A$ は K 上の algebra で，$\mathrm{Cor}_{L/K} : A$ 加群 $\longrightarrow \mathrm{Cor}_{L/K} A$ 加群も定義される．

注2′． X が L 上の scheme なら Restriction of scalars $\prod_{L/K} X$ は K 上の scheme で $\mathrm{Cor}_{L/K} : X$ 加群 $\longrightarrow \prod_{L/K} X$ 加群が定義される．

これらのそれぞれの場合にノルム写像 $K_0(X) \longrightarrow K_0(Y)$，$K_0(A) \longrightarrow K_0(\mathrm{Cor}\,A)$，$K_0(X) \longrightarrow K_0(\prod_{L/K} X)$ がひきおこされる．注1の場合の証明を与える．

一般に Z が有限群 G の作用する scheme のとき有限 G 集合 A に対して $(P(X)^A, G)$ で次のようなものを対象とする圏をあらわす． $\{F_a\ (a \in A),\ \varphi_{\sigma,a}\ (\sigma \in G,\ a \in A)\}$ ． ここで

$F_a \in P(Z)$ i.e. Z 上の locally free module，$\varphi_{\sigma,a} : \sigma^* F_{\sigma(a)} \xrightarrow{\sim} F_a$ s.t. $\varphi_{\sigma,a}$ たちは結合法則をみたす．これは完全圏でその $K_0 = K_0(P(Z)^A, G)$ がある．$Z \longrightarrow Y$ が etale Galois covering のときは，$(P(Z)^{\{1点\}}, G) \simeq P(Y)$，$(P(Z)^G, G) \simeq P(Z)$ で $\mathrm{Cor} : P(Z) \longrightarrow P(Y)$ は $\{F_\sigma\}_{\sigma\in G} \longmapsto \bigotimes_{\sigma\in G} F_\sigma$ に対応する．一般の場合に G 集合の射 $f : A \longrightarrow A'$ があれば，$f^* : K_0(P(Z)^{A'}, G) \longrightarrow K_0(P(Z)^A, G)$，$f_* : K_0(P(Z)^A, G) \longrightarrow K_0(P(Z)^{A'}, G)$ がひきおこされる．さて G 集合 Φ が与えられたとして，$S = 2^\Phi = \{\Phi$ の部分集合$\}$，$S' = \{(U, U') \in S \times S \mid U \cap U' = \phi\}$ とおく．G 写像 $j : S' \hookrightarrow S \times S$，$u : S' \longrightarrow S$ $(U, U') \longmapsto U \cup U'$ がある．$K_0(P(Z)^S, G)$ 上に演算 $\cup$ を

$$\cup : K_0(P(Z)^S, G) \times K_0(P(Z)^S, G) \underset{\boxtimes}{\longrightarrow} K_0(P(Z)^{S\times S}, G)$$
$$\underset{j^*}{\longrightarrow} K_0(P(Z)^{S'}, G) \underset{u_*}{\longrightarrow} K_0(P(Z)^S, G)$$

で定義する．また $F = \{F_\phi\}_{\phi\in\Phi} \in (P(Z)^\Phi, G)$ に対して $\{\bigotimes_{\phi\in U} F_\phi\}_{U\subset\Phi}$ の $K_0(P(Z)^S, G)$ での類を $\rho(F)$ とおく．次の二点が示される．

- $+, \cup$ に関し $K_0(P(Z)^S, G)$ は graded ring
- $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ (exact) ならば $\rho(F) = \rho(F') \cup \rho(F'')$

また $\rho(F) = 1 + (\text{degree} > 0)$ の形でとくに $K_0(P(Z)^S, G)$ の可逆元．

これで abel群の準同型 $K_0(P(Z)^{\Phi}, G) \longrightarrow K_0(P(Z)^S, G)^*$ s.t. $[F] \mapsto \wp(F)$ が定まる. $\{\Phi\} \subset S$ への制限をとれば $K_0(P(Z)^{\Phi}, G) \longrightarrow K_0(P(Z), G)$ $[\{F_\phi\}] \mapsto [\otimes F_\phi]$ がえられる. 注1の場合, $Z \to Y$ を etale Galois として $X = Z/H$, $H \leq G$, $\Phi = G/H$ とすれば, これが $\mathrm{Cor}_{X/Y} : K_0(X) \to K_0(Y)$ を与える.

注4. affine の場合には $K_0(X)$ の relation は直和によるものであり, このような場合に $\oplus$ を保たないある種の関手を K_0 上の operation に拡張する方法として, Dress の多項式写像の方法がある. これは有限群の表現環上で乗法的 induction を定義するのに使われた ([2]). 上のやり方は relation が完全列による場合にも使えるので, [2] で扱われた relative な表現環上で乗法的 induction を定義することができる.

注5. $Y \longrightarrow Z$ が n次の etale covering で Y, Z は体上の non-singular variety とする. Y, Z の K_0 は coherent sheaf の K_0 と同一視され, $\mathrm{Fil}^k K_0$ を codim Supp $F \geq k$ なる coherent F の類で生成される K_0 の部分群とする. norm map $K_0(Y) \longrightarrow K_0(Z)$ は $\mathrm{Fil}^k K_0(Y)$ を $\mathrm{Fil}^{kn} K_0(Z)$ にうつす. また rational equivalence ring についても norm map $A^k(Y) \longrightarrow A^{kn}(Z)$ が定義できる

注6. L/K が n 次のガロア拡大のとき、写像 $K_{2i}(L) \longrightarrow K_{2ni}(K)$ で $K_{2ni}(K) \longrightarrow K_{2ni}(L)$ を合成すると $x \longmapsto \prod_{\sigma \in G} x^{\sigma}$ となるものはあるか？

§2. Mackey λ - ring

vector bundle の exterior power $F \mapsto \Lambda^i F$ は $K_0(X)$ 上の operation $\lambda^i : [F] \longmapsto [\Lambda^i F]$ をひきおこす．λ^i たちの $K_0(X)$ への作用の仕方を抽象化して operation の環 $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \cdots]$ を考え $\mathcal{U}$ が同じような仕方で作用する環を λ-ring という．$\mathcal{U}$ はいろいろな構造をもち，任意の可換環 S に対して $\mathrm{Hom}_{ring}(\mathcal{U}, S)$ は可換環になる．$\mathcal{U}$ または $\mathrm{Hom}_{ring}(\mathcal{U}, -)$ は universal ring とよばれる．$X \longrightarrow Y$ が G をガロア群とする etale covering のとき，各部分群 $H \leqslant G$ ごとに operation $\lambda^i : K_0(X/H) \longrightarrow K_0(X/H)$ があるが，この他に $H \leqslant H' \leqslant G$ のとき，pull back $K_0(X/H') \longrightarrow K_0(X/H)$, trace $K_0(X/H) \longrightarrow K_0(X/H')$, norm $K_0(X/H) \longrightarrow K_0(X/H')$, H の基礎体 K 上の指標環 $R(H)$ の作用 $R(H) \otimes K_0(X/H) \longrightarrow K_0(X/H)$ がある．これらの operation たちから universal ring に相当するものを定義する．以下有限群 G と体 K を固定する．

定義： M が Mackey functor とは有限 G 集合 A に対し abel 群 $M(A)$ が対応し，G-map $f : A \longrightarrow A'$ に対し2つの準同型 $f^*: M(A') \longrightarrow M(A)$, $f_* : M(A) \longrightarrow M(A')$ が対応し，次をみたすこ

とをいう.

(i) $f \mapsto f^*$, $f \mapsto f_*$ は関手.

(ii) M は直和をたもつ.

(iii)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A' & \xrightarrow{h'} & B' \end{array}$$

が pull back diagram なら $g^* h'_* = h_* f^*$.

G 集合 G/H に対し K[H] の Gro. group を R(G/H) として Mackey functor $R : G/H \mapsto R(G/H)$ がえられる. 以下 R はこれを表わす. 2つの Mackey functor M, N から Mackey functor $M \otimes N$ をつくれるので, Mackey functor としての ring (R はそう), R-algebra が自然に定義される. 可換な R-algebra のみ考える. R-algebras から R-algebras へのある関手 Λ と自然変換 $w : \Lambda \longrightarrow \Lambda \circ \Lambda$ が定義され, さらに Mackey λ-ring とは R-algebra S で次の可換性をみたす R-algebra homomorphism $\lambda : S \longrightarrow \Lambda(S)$ のあたえられたものをいう.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\lambda} & \Lambda(S) \\ {\scriptstyle \lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda(\lambda)} \\ \Lambda(S) & \xrightarrow{w(S)} & \Lambda\circ\Lambda(S) \end{array}.$$

普通の λ-ring では $\Lambda(S) = \mathrm{Hom}_{ring}(u, S) = 1 + S[[t]]^+$ である. (初項が1の形式巾級数の環) Λ, w の定義は講演で詳

しくのべた． $\Lambda(S)$ の G 集合 A での値はある Mackey functor (R-algebra) $\mathcal{U}_A$ により $\Lambda(S)(A) = \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(\mathcal{U}_A, S)$ と表現される． $\mathcal{U}_A$ が universal ring に相当するもので，大ざっぱに言って $(\underbrace{GL \times \cdots \times GL}_{\# A \text{コ}}) \rtimes G$ の多項式表現の Grothendieck 環からえられる． X が G の作用する K 上の scheme のとき， $G/H \longmapsto K_0(\{X \text{上の} H\text{-bundle}\})$ は Mackey λ-ring になる． これはこの section のはじめにあげた operation たちの formal な関係をひとまとめに表わしている．

§3. Polynomial functors

§2 のはじめにのべた operations の K_0 への作用は polynomial functor の X 上の module への作用からきている． $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \cdots]$ は K 加群から K 加群への polynomial functors の Gro. ring であるが，我々の場合は，体拡大 L/K に対して L 加群から K 加群への K 上の polynomial functors を考えることになる．([3] では K が標数 0 の可換体のとき K 上有限次の algebra A 上の射影加群の圏から K 加群の圏への polynomial functor があつかわれている) D が K 上有限次の斜体で中心が K 上分離的のとき， D 加群から K 加群への K 上の polynomial functors の Gro. ring が求まるが複雑な形をしている．

REFERENCES

1. P. Berthelot, Généralités sur les λ-Anneaux, SGA 6

2. A. W. M. Dress, Operations in representation rings, Proc. Symposia in Pure Math. XXI (1971)

3. I. G. Macdonald, Polynomial functors and wreath products, Journal of Pure and Applied Algebra 18 (1980)